



***Facultad
de
Ciencias***

De La Tierra a la Luna

From the Earth to the Moon

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN FÍSICA

Autor: Manuel Santamaría Álvarez

Director: Francisco J. Carrera Troyano

Junio – 2020

“Todo lo que una persona puede imaginar otros lo pueden hacer
realidad “

Julio Verne

Agradecimientos

Para comenzar, a Francisco J. por su constante amabilidad, paciencia y disposición además de su refuerzo positivo para realizar el trabajo.

A las dos chicas de mi vida que serían mi hermana Sofía y a Marina por estar ahí para levantarme el ánimo y darme el cariño.

A todas las personas fantásticas que me he cruzado en estos años en la universidad y me han apoyado y me han enseñado conocimientos que no solo te los dan los libros, y cómo no por las risas y buenos momentos que me he llevado.

A mi familia que casi se podría decir que es trivial la explicación, pero sin ellos nunca habría llegado aquí.

Por último, me gustaría mencionar que esta etapa de la vida creo que ha sido vital en mi desarrollo como persona y como adulto para seguir en este largo trayecto que aun me queda.

A todos gracias...

Resumen

Julio Verne, avanzado a su tiempo, imagino en su obra “De la Tierra a la Luna” un enorme proyectil disparado con un cañón gigante hacia la Luna.

Independientemente de otras consideraciones sobre la salud de los tripulantes y la resistencia de los materiales, en este proyecto intentamos reconstruir las órbitas posibles que llevaría el proyectil en esas condiciones, y comprobar cual serían viables de impactar en la Luna. En este trabajo hemos realizado un estudio teórico inspirado en las leyes de Kepler y las ecuaciones de movimiento de Newton. Cabe destacar que es un estudio en un ideal sacado a partir de ciertas aproximaciones. Cómo sería posible esto, y como de rápido tendría que ser el disparo y con qué dirección se debería apuntar a la Luna, además de cómo sería el movimiento de esta y cuánto tiempo llevaría al viaje a los tripulantes.

Palabras clave: Disparo, Tierra, Luna, Kepler, Programación

Abstract

Jules Verne, ahead of his time, imagined in his work "From the Earth to the Moon" a huge projectile fired with a giant cannon towards the Moon.

Regardless of other considerations on the health of the crew and the resistance of the materials, in this project we try to reconstruct the possible orbits that the project would take under these conditions, and to verify which these are viable to impact on the Moon. In this work we have carried out a theoretical study inspired by Kepler's laws and Newton's equations of motion. It should be noted that it is a study in an ideal extraction from certain approximations. How would this be possible, and how fast the shot should be and in what direction the Moon should be aimed, as well as how the Moon would move and how long it would take the crew to travel.

Keywords: Shooting, Earth, Moon, Kepler, Programming

Contenidos

1.	Introducción	7
1.1	Motivación del trabajo	8
1.2	Objetivos del trabajo	9
2.	Fundamentos teóricos	10
2.1	Leyes de Kepler	11
2.2	Ecuaciones del movimiento de Newton	13
2.3	Python	17
3.	Metodología	19
3.1	Modelo Teórico	19
3.2	Cálculos teóricos del modelo	21
3.3	Programación del modelo	25
4.	Análisis y Discusión de resultados	27
4.1	Resultados experimentales	28
4.2	Cálculos de los disparos	33
5.	Consideraciones finales y trabajo futuro	37
5.1	Conclusiones	37
5.2	Posibles continuaciones	38
6.	Anexo	
7.	Bibliografía	

Capítulo 1

Introducción

La astronomía es una ciencia de un origen antiguo y practicada desde tiempos inmemoriales por multitud de civilizaciones. Julio Verne fue uno más de los muchos que se preguntó cómo sería un viaje a la Luna y estaba seguro de que algún día se haría.

Así lo plasmo en sus dos archiconocidas novelas de “De la Tierra a la Luna” y “Alrededor de la Luna” publicada en 1865 y 1870, respectivamente. La trama de estas novelas consistía en un intrépido proyecto del Gun club, un círculo de artilleros de Baltimore, que consistía en enviar un enorme proyectil de aluminio disparado por un cañón de casi trescientos metros. Dicho proyectil haría de nave espacial ya que sería modificado para permitir que tuviera tres investigadores como pasajeros. En su secuela el narrador cuenta las aventuras del viaje dentro de la “bala” gigante. El plan inicial era aterrizar en el satélite, pero pronto se darían cuenta que se quedan orbitando alrededor de la Luna. Con ello consiguen confirmar que, en la cara interna de la Luna, la que apunta a la Tierra, no hay indicios de vida, pero cuando observan la cara oculta de la Luna ven que la luna en un pasado tuvo continentes y ciudades. Con dichas observaciones utilizan los cohetes con los que una primera idea era alunizar. Sin éxito, se ven de vuelta hacia la Tierra

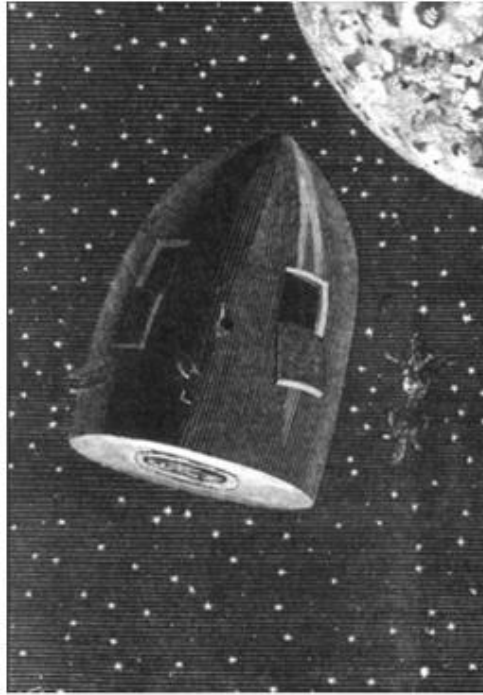


Figura 1: proyectil y nave para los tripulantes que Julio Verne imagino
[12]

Obviamente es fácil de imaginar, pero inmensamente difícil de efectuar por ello vamos a elaborar un resumen con ayuda de Kepler y Newton sobre qué factores debemos tener en cuenta a la hora de teorizar sobre esta idea de llegar a la Luna.

1.1.- Motivación comienzo del trabajo

En un planeta cada vez más dependiente del conocimiento científico y de su objetivo, la tecnología, sigue habiendo una gran cantidad de creencias e ideas pseudocientíficas. Sin embargo, la astronomía es algo que despierta mucho interés y es porque es algo que, aunque no se comprenda todos podemos ver. Por ejemplo, desde hace siglos la humanidad sueña con viajar a la luna y desde hace décadas nos llevan prometiendo una base en la Luna. Armstrong puso un pie y se quedó en eso, una huella en nuestro satélite.

Solo doce hombres hasta el día de hoy caminaron sobre la Tierra y este hito se realizó entre el 24 de julio de 1969 y diciembre de 1972, las últimas seis misiones del tercer programa de vuelos espaciales tripulados de Estados Unidos, el Programa Apolo llevado a cabo por la NASA. Dichas seis misiones, desde Apolo 11 con Armstrong hasta Apolo 17, sirvieron a parte de para alunizar para investigación geológica.

Así 100 años antes de hacerse realidad, Julio Verne ya imaginó como esos hombres podrían viajar con aventura, riesgo y mucha imaginación a nuestro satélite. Gracias a las herramientas y conocimientos teóricos de los que disponemos hoy en día podemos simular y estipular con cierta facilidad cómo se comportaría y cómo se podría lograr. Ha sido lo que hemos intentado realizar atribuyendo distintas aproximaciones y planteando un modelo con ayuda de Kepler y Newton. Las posibilidades eran muy amplias para este proyecto pudiendo introducir cada vez más factores a tener en cuenta.

Además, este trabajo puede ser una herramienta muy visual y atractiva para entender cómo funcionan las órbitas y de aprender mejor términos y conocimientos como las leyes de Kepler. También ha sido una forma de introducirme en el mundo de la programación con Python, un lenguaje versátil de los más utilizados en el mundo del desarrollo y en increíble crecimiento.

1.2.- Objetivos del trabajo y estructura del trabajo

Con los aspectos y las motivaciones más relevantes detrás de este trabajo se plantean los objetivos a la realización de este:

Solución y simulación de un sistema compuesto de tres cuerpos -Tierra, Luna y proyectil- que consideramos sin estructura interna y caracterizados únicamente por sus masas, así como, la única interacción presente será la gravitatoria generada por la Tierra

Este objetivo será contemplado a lo largo del trabajo con la siguiente estructura:

En el capítulo 2 se realiza una descripción teórica de los conceptos principales que engloba el trabajo: leyes de Kepler, ley de gravitación universal de Newton y el programa utilizado. En el capítulo 3 se explicará en el modelo teórico, así como se ha aplicado la teoría para realizar unos cálculos previos además de introducirla en el programa. En el capítulo 3 nos hemos centrado tanto como en el dibujo de las órbitas calculadas como en distintas gráficas en función de la velocidad de disparo inicial donde también se ha explicado el comportamiento de todos los cálculos y gráficas dadas por el programa. Hemos continuado con el capítulo 4 que básicamente serían las conclusiones finales del trabajo, así como unas ideas planteadas como continuación a este. Por último, hemos dado un apéndice y una bibliografía utilizada en el trabajo

Capítulo 2

Antecedentes teóricos

Para poder comenzar el trabajo y entender de dónde salen los resultados necesitamos marcar un modelo inicial del problema y las leyes y pautas que vamos a tener en cuenta. Por ello en este capítulo vamos a comenzar explicando las leyes de Kepler para luego con ayuda de las ecuaciones de Newton y su ley de gravitación universal comprender mejor cómo se comportan los planetas y sus órbitas. Por último, elaboraremos un resumen de que es Python, cuál es su funcionalidad y qué funciones hemos utilizado

Hablaremos primero de una magnitud matemática muy importante para entender las leyes de Kepler:

La **excentricidad** e es un parámetro que indica el tipo de sección cónica y aplicado a las órbitas nos ayuda a cuantificar la manera en que su órbita alrededor de otro cuerpo se desvía de una circunferencia perfecta:

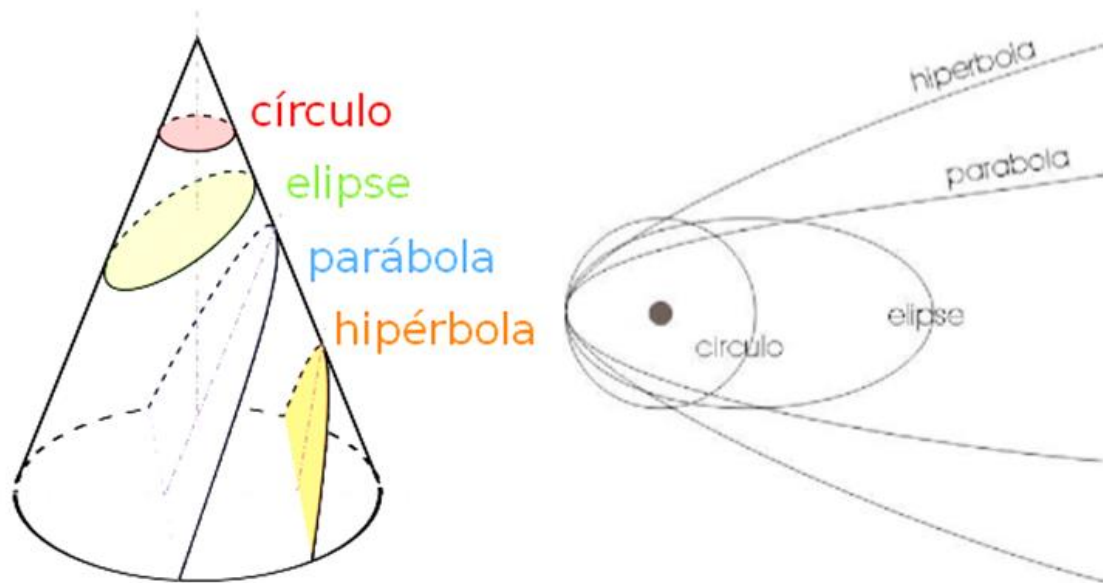


Figura 2: Secciones cónicas y órbitas a las que equivalen [10]

La excentricidad toma los siguientes valores:

- $e = 0$ circunferencia
- $0 < e < 1$ elipse
- $e = 1$ parábola
- $e > 1$ hipérbola

2.1.- Leyes de Kepler

Johannes Kepler partiendo de las observaciones Tycho Brahe sobre los planetas y estudiándolas durante 5 años publicó las dos primeras leyes del movimiento planetario, donde la primera establece:

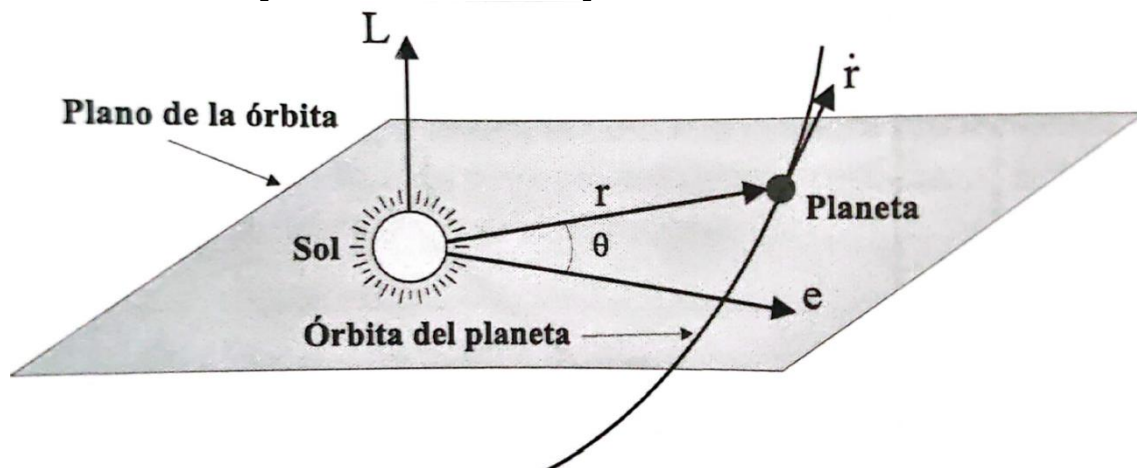


Figura 3: vector de posición de un planeta tomando como posición el sol [1]

- **1ª Ley de Kepler:** “La órbita de todos los planetas es una elipse con el sol en uno de sus focos”

Matemáticamente la distancia entre un cuerpo central y un cuerpo en órbita se puede expresar como:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos(\theta)} \quad (1)$$

Siendo r la distancia al origen, a es el semieje mayor que define el tamaño de la órbita, e es la excentricidad que define la forma y θ es el ángulo que forma el vector de posición r con la mínima distancia del astro a la órbita que en este caso es $a(1 - e)$. Se puede fijar cualquier punto mediante sus coordenadas polares (r, θ)

- **2ª Ley de Kepler:** “El vector de posición de un planeta con origen en el sol barre áreas iguales en tiempos iguales”

Es decir, la velocidad con que el radio vector barre áreas es constante y lo podemos expresar como:

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{|L|}{m} \quad (2)$$

Siendo A el área barrida por el vector de posición del planeta durante un tiempo t .

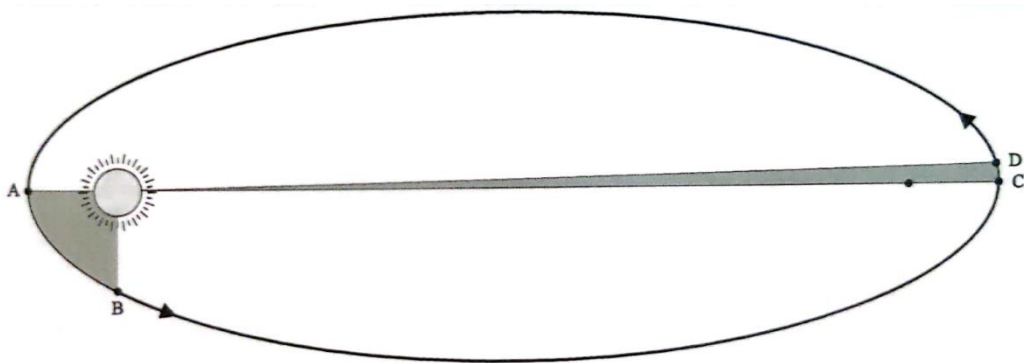


Figura 4: el área del segmento oscuro correspondiente a que el astro fuera del punto A al B es el mismo al del segmento de si fuera del C al D **[1]**

Cabe destacar que esto establece que la velocidad de traslación del planeta es máxima en la distancia mínima con el astro (periastro) y mínima en el punto de la órbita más alejado (apoastro).

Después de enunciar estas dos leyes Kepler seguía buscando como relacionar los movimientos de los planetas entre sí. Hasta que en 1619 dio con ella y lo publicó:

- **3ª Ley de Kepler:** “El cociente entre los cubos de los semiejes mayores de las órbitas de dos planetas es igual al cociente de los cuadrados de sus periodos orbitales

Y que se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{a^3}{a'^3} = \frac{T^2}{T'^2} \quad (3)$$

La demostración se puede ver en el apéndice en REFERENCIA

Para poder entenderlo y resolverlo nos ayudaremos de las leyes de Kepler, que, gracias a la explicación de Newton con la ley de gravitación universal, en 1687, que introdujo una expresión para la fuerza entre dos cuerpos y junto a la segunda ley de Newton explicaría el movimiento de los astros.

2.2.- Ecuaciones de movimiento de Newton:

La gravitación genera la fuerza ejercida entre dos astros. Según Newton esta ley viene enunciada tal que si r_1 y r_2 son los vectores de posición de dos partículas de masas m_1 y m_2 respectivamente y siempre medidos en un sistema de referencia inercial (que se halla en movimiento rectilíneo uniforme, es decir, aceleración nula), la fuerza que actúa sobre cada uno de los cuerpos debido a la atracción del otro:

$$F_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \quad (4.1)$$

$$F_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \quad (4.2)$$

Siendo el vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ y G representa la constante de gravitación universal.

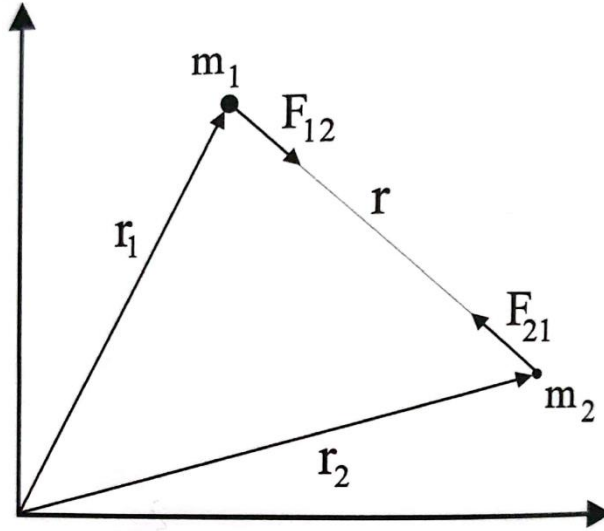


Figura 5: vectores de posición y fuerza entre dos cuerpos [1]

A partir de la Ley de Newton, la cual relaciona la fuerza con la aceleración que induce, llegamos a:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (5.1)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (5.2)$$

Aquí podemos suponer la masa de los cuerpos, por ejemplo m_2 , mucho mayor que la del otro lo que haría que el movimiento del más masivo no se vea afectado por el otro, es decir, podríamos despreciar la fuerza ejercida sobre ese cuerpo y el cuerpo más pesado realizaría un movimiento rectilíneo y uniforme. Con esta aproximación conseguiríamos un sistema de referencia fijo con origen en m_2 ($\mathbf{r}_2 = 0$), que será inercial y el movimiento de m_1 vendrá dado por la ecuación 5.1:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G \frac{m_1 m_2}{r_1^3} \mathbf{r}_1 \quad (5.3)$$

Por ejemplo, en el Sistema Solar, el sol es mucho más masivo y se puede aplicar esta aproximación llegando a la siguiente ecuación:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r} \quad (5.4)$$

Siendo $\alpha = GMm$, M la masa del astro más masivo y r el vector de posición del astro menos pesado tomando el centro del masivo como origen.

Para llegar a un resultado y poder resolver esta ecuación tendremos en cuenta las constantes fundamentales del momento angular y energía

debido a la dirección radial de la fuerza y la segunda consecuencia a la de ser conservativa:

- *Momento angular:*

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (6)$$

El momento angular del planeta no varía con el tiempo $\dot{\mathbf{L}} = 0$

El principio de conservación del momento angular afirma que si el momento de las fuerzas exteriores es cero se conserva. Considerando el sistema Tierra-Luna aislado el momento angular se mantendrá constante.

- *Energía*

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{\alpha}{r} \quad (8)$$

Siendo el primer factor la energía cinética y el segundo la potencial Se realiza su derivada resultando ser nula en **[1]** (pág. 89)

Además, hablaremos también del Vector de Runge-Lenz que es una constante de movimiento, pero no es fundamental, sino una forma de simplificar los cálculos.

- *Vector de Runge-Lenz*

$$\mathbf{e} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}}{\alpha} - \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (7)$$

Que su derivada también es cero como se ve en **[1]** (pág. 89)

Por lo tanto, tenemos 7 cantidades conservadas con las que podemos llegar como se demuestra en la siguiente relación:

$$\alpha^2 m (e^2 - 1) = 2EL^2 \quad (9)$$

Siendo un vector contenido en el plano orbital y por tanto $\mathbf{e} \cdot \mathbf{L} = 0$ podemos cogerlo como medición y origen para la medición de ángulos, es decir, podemos fijar cualquier punto con coordenadas polares (r, θ)

El producto escalar entre los vectores \mathbf{r} y \mathbf{e} será:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = re \cos(\theta) \quad (10)$$

Siendo θ el ángulo entre \mathbf{r} y \mathbf{e} . También se puede analizar este producto escalar con la definición de vector \mathbf{e} de Runge-Lenz dado en la ecuación (8) llegando a:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = \frac{L^2}{m\alpha} - r \quad (11)$$

Que igualando y despejando r obtenemos la siguiente ecuación:

$$r = \frac{L/m\alpha}{1 + e \cdot \cos(\theta)} \quad (12)$$

Que corresponde a la ecuación de una sección cónica expresada en coordenadas polares con un foco en el origen y una excentricidad e el módulo del vector de Runge-Lentz, y sí, ya se va pareciendo a la ecuación que utilizó Kepler y con lo que obtenía así distintos parámetros de la órbita.

Cabe destacar que el módulo del vector \mathbf{e} indica la excentricidad e de la órbita, su dirección es la del punto más próximo al foco (periastro), dado que el valor menor de r corresponder a $\theta = 0$.

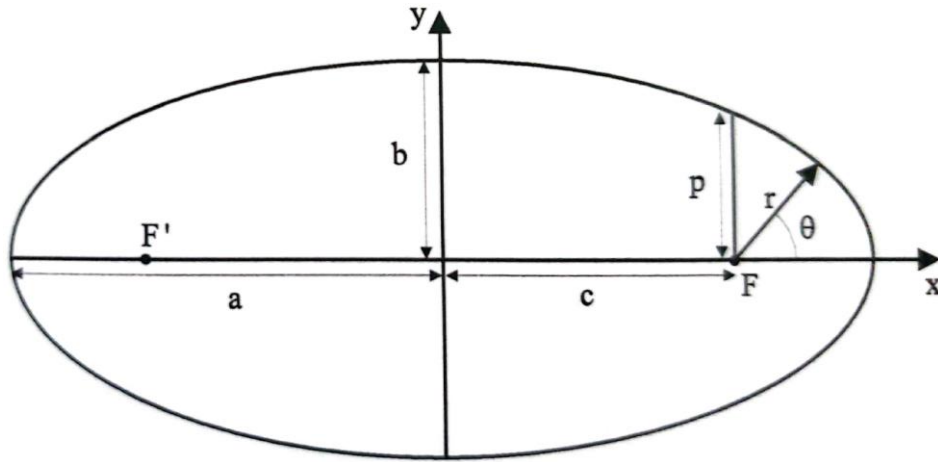


Figura 6: órbita elíptica para representar parámetros a y p [1]

- El parámetro p de la órbita que la Figura 5 representa su interpretación geométrica viene dado por:

$$p = \frac{L^2}{m\alpha} \quad (13)$$

- El semieje mayor a viene dado por:

$$a = \frac{\alpha}{2|E|} \quad (14)$$

2.3.- Python

Cada año más famoso Python es un lenguaje de programación de código abierto, orientado a objetos, muy simple y fácil de entender. Una de las ventajas principales de aprender Python es la posibilidad de crear un código con gran legibilidad, que ahorra tiempo y recursos, lo que facilita su comprensión e implementación.

Tiene una sintaxis sencilla que cuenta con una vasta biblioteca de herramientas como en este caso que hemos usado siempre las bibliotecas de Numpy y Plotly incluso hemos podido utilizar una herramienta para calcular las órbitas llamado Pytwobodyorbit creado por un profesor japonés con el que pudimos contactar. Es una herramienta que nos ha sido de gran utilidad y se explicará de una manera más extendida que otras librerías empleadas que son más generales y conocidas.

Nombraremos ahora las librerías que hemos utilizado además de explicar un poco brevemente sus funciones y métodos y para lo que las hemos utilizado

- **Scipy [7]**: librería de código abierto para Python compuesta por herramientas y algoritmos matemáticos. Nosotros hemos utilizado principalmente la clase **interp1d** que es un método que realiza una interpolación tipo spline cúbica y básicamente es una función que interpola entre valores de datos conocidos para obtener datos desconocidos.
- **Numpy [8]**: biblioteca de código abierto que da soporte para trabajar con vectores y matrices, además de una gran variedad de funciones matemáticas. Principalmente la hemos utilizado para creación de matrices, porque ahorra bastantes líneas de código y es más práctico
- **Plotly [6]**: es una herramienta web que sirve para el análisis y visualización de datos. En concreto hemos importado de esta librería **graph_objects** (como **go** en el programa) que contiene una jerarquía generada automáticamente de clases de Python que ayuda a representar y realizar gráficos y figuras
- **Pytwobodyorbit [5]**: es un módulo creado por “Shusi Uetsuki” [11] un japonés trabajador en la empresa de desarrollo y tecnología espacial Co.Ltd. Dicho programa proporciona varios cálculos sobre

órbitas de dos cuerpos y todos en el sistema internacional de unidades. Este módulo contienen la clase **TwoBodyOrbit** que tiene los atributos del **bodyname**(nombre del cuerpo celeste), **mothername**(nombre cuerpo central) y **mu**(parámetro gravitacional) y hemos utilizado distintos métodos con las siguientes funcionalidades, aunque contiene más:

- 1 **setOrbKepl**: define la órbita por elementos orbitales cartesianos (posición y velocidad) y hay que darle los argumentos de **t(h)**, **pos([x,y,z])**, **vel([xd,yd,zd])**
- 2 **elmKepl**: devuelve elementos orbitales clásicos (elementos orbitales keplerianos)
- 3 **posvelatt**: devuelve la posición y la velocidad del cuerpo un tiempo determinado escogido por el usuario.
- 4 **points**: devuelve puntos en la trayectoria orbital para su visualización.

Capítulo 3

Metodología

En este capítulo expondremos cómo ha sido el planteamiento del problema con un modelo teórico, como hemos utilizado la teoría para poder realizar los programas además de comprobar los resultados dados por estos. Por último, hemos dado una explicación de los programas realizados con Python y él por qué.

3.1.- Modelo teórico:

En este trabajo se ha comenzado con el siguiente modelo:

- Un sistema compuesto por 3 cuerpos Tierra, luna y proyectil caracterizados únicamente por la masa de la Tierra M_T

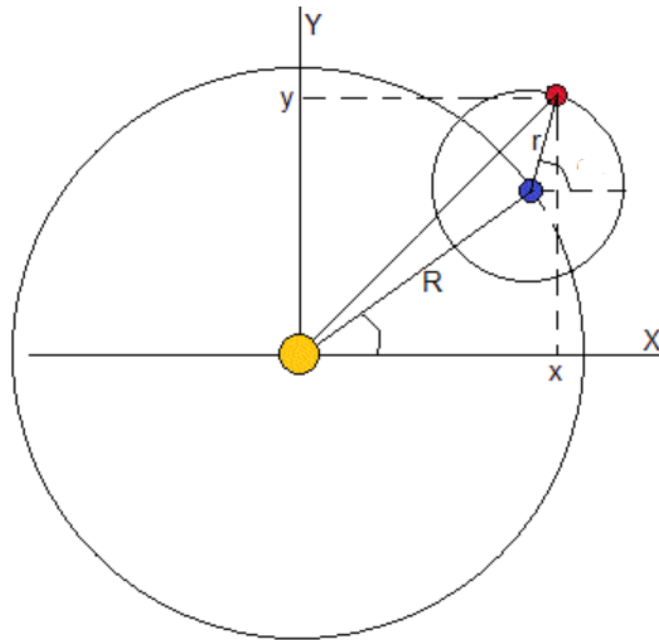


Figura 7: sistema del problema siendo el punto azul la Luna, el rojo la nave R la distancia de la Tierra a la Luna.

- La única interacción es la gravitatoria que nos basaremos en la ley de gravitación universal desarrollada por Newton y explicada en el capítulo anterior.

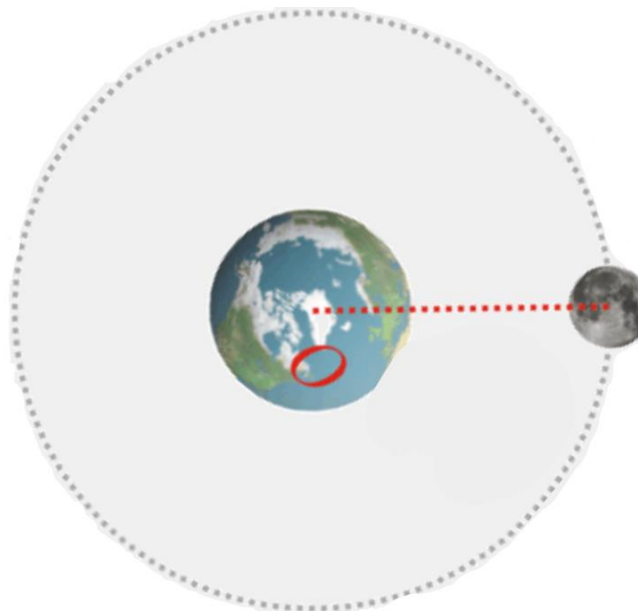


Figura 8: órbita de la Luna utilizada en el trabajo con su posición inicial en la línea de puntos **[13]**

- Para realizar los cálculos hemos supuesto que la Tierra permanece inmóvil durante el movimiento que tiene lugar alrededor de su centro

- La Luna se mueve con un movimiento circular uniforme de radio y periodos calculados más adelante en este capítulo. Resaltar que hemos utilizado el ángulo constantemente para poder saber la posición de la luna, ya que se trata de un movimiento circular uniforme, y con el poder realizar un disparo certero. El problema es que no hay una expresión analítica para el ángulo θ como función del tiempo, así que con la librería **pytwobodyorbit**, interpolando entre los valores de la posición y el ángulo a unos tiempos determinados
- Hemos planteado la órbita de la Luna en el plano ecuatorial de la Tierra y que el lanzamiento se produce radialmente desde el ecuador, por lo que la órbita del proyectil también estará contenida en este plano ecuatorial
- La posición inicial de los astros y el principal eje de movimiento desde el cual se va a medir el ángulo se ve cómo la línea roja de puntos en la *Figura 7*, es decir, mediremos el ángulo inicial de disparo respecto a la dirección de la Luna en el momento del disparo
- Hemos tenido en cuenta la velocidad transversal que sufre la nave debido la rotación de la Tierra
- El proyectil parte con una velocidad radial inicial impartida por el cañón y θ_0 respecto al eje de dirección inicial de la Luna

3.2.- Cálculos teóricos del modelo

Se comenzó comprobando distintos valores para ir haciendo un seguimiento con la bibliografía y que los resultados sean lo más correcto posible. A medida que se realizaban se iban metiendo en el programa y se comprobaba que Python sacara resultados iguales. Marcamos distintas constantes además de algún método:

Constantes:

Masa de la Tierra	$M_T = 5.9722 \times 10^{24} \text{ kg}$
Masa de la Luna	$M_L = 7.349 \times 10^{22} \text{ kg}$
Radio de la Tierra	$R_T = 6.3781 \times 10^6 \text{ m}$
Radio de la órbita de la Luna	$D = 384400000 \text{ m}$
La Constante gravitacional	$G = 6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
Duración de un día terrestre	$\tau = 23 \text{ h } 56 \text{ min} = 86160 \text{ s}$

Tabla 1: constantes utilizadas para realizar los cálculos posteriores

Magnitudes:

Periodo orbital: realizamos un método que calculase y retornase el valor del periodo orbital a partir de la masa del astro y del apogeo de la órbita. Pedimos estas magnitudes porque nos basamos en versión newtoniana de la tercera ley de Kepler que dice dada una órbita circular o elíptica alrededor de un objeto masivo central el periodo es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}} \quad (15)$$

Siendo a el semieje mayor de la órbita (en metros) y M la masa del astro del cual estemos calculando la órbita

Esta ecuación la introducimos en el programa para calcular el periodo de la Luna y de algún otro astro si lo necesitásemos.

También se realizó la siguiente comprobación a mano para comparar resultados. Para calcular el periodo orbital de la Luna podemos hacerlo a partir de la velocidad orbital la cual se puede sacar de igualar la fuerza de atracción gravitatoria y la centrípeta, como consecuencia del giro, de la siguiente manera:

$$F_G = F_c \rightarrow G \frac{M_T M_L}{D^2} = M_L \frac{v^2}{D} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{D}} = 1.018 \times 10^3 \text{ m/s} \quad (16)$$

Y a partir de esta calcular el periodo orbital

$$v = \frac{2\pi D}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi D}{v} \cdot \frac{1 \text{ día}}{86400 \text{ s}} = 27.43 \text{ días} \quad (17)$$

Puesto que el objetivo del proyecto es el de llegar a la luna vamos a fijarnos en el sistema e ir calculando primero variables que nos ayuden con la simulación y resultados. El sistema es geocéntrico, es decir que la Tierra se mantiene en el centro y permanece inmóvil debido a que su masa es mucho mayor que la de la Luna, esto es una de las aproximaciones de las que se explicadas en el capítulo 1 con las ecuaciones de Newton.

Cabe decir que según la primera ley de Kepler (1) dada anteriormente tendremos la posición de la Luna, es decir, la distancia a la que se encuentra de la Tierra. Se han realizado los cálculos para una excentricidad fija que sería $e = 0$, además, que nuestra posición inicial del sistema es en la cual la Luna se encuentra en periastro o el radio de su órbita que se explicó en el modelo de órbita circular planteado, lo que hace que esto se interprete como $\theta_p = 0^\circ$, por tanto, para una órbita cerrada (en este caso circular):

$$r(\theta = \theta_p) = q \quad (18)$$

Además, otro factor a considerar es que la Tierra gira sobre si misma por tanto tenemos una velocidad transversal inicial debido a la rotación que la calculamos así.

El disparo de la nave se realiza desde el ecuador y variará en función de la velocidad inicial de disparo, así como del ángulo en el que dispare. Para calcular dicha velocidad deberemos tener en cuenta tanto la velocidad radial inicial que es la que variaremos, como la velocidad transversal β que llevara el proyectil debido al giro propio de la Tierra, Siendo

$$V^2 = \beta^2 + v_r^2 \quad (19)$$

La **velocidad transversal inicial** en el ecuador se puede calcular de la siguiente manera:

$$\beta = \frac{2\pi R}{\tau} \quad (20)$$

Donde R es igual al radio de la tierra $6370km$ y τ es el periodo de rotación de la Tierra en segundos (1 día). Quedándonos a mano un valor de $\beta = 463.24 m/s$ para la Tierra.

También podemos obtener el momento angular total L/m de la nave cuando se encuentre en el ecuador, equivalente a la distancia al centro R por la velocidad angular β , es decir:

$$\frac{L}{m} = R\beta = \frac{2\pi R^2}{\tau} = l \quad (21)$$

Con esta velocidad del proyectil se han calculado las velocidades de disparo las cuales se encuentran en el rango en el que conseguimos el objetivo principal, es decir, llegar a la Luna. Por tanto, hemos elegido 3 velocidades para tener un rango entre ellas que serían:

- Para saber esta velocidad primero tenías que calcular a qué distancia se igualan las fuerzas, a la que llamaremos d . Para esto nos basamos en el principio de conservación del momento explicado en el apartado 1.2:

$$F_L = F_{Ti} \rightarrow \frac{GM_T}{d^2} = \frac{GM_L}{(D - d)^2} \rightarrow d = D \frac{M_T - \sqrt{M_T M_L}}{M_T - M_L} \quad (22)$$

Obteniendo un resultado a mano de $d = 345847 m$

Una vez conocida esta distancia ya partir del principio de conservación de la energía en ambas posiciones y contando que en el punto en el que queremos calcular la velocidad radial de la nave se anulará debido a que se igualan las fuerzas de la Luna y de la Tierra planteamos lo siguiente:

$$\begin{cases} \frac{E}{m} = \frac{1}{2}(V_r^2 + V_T^2) - \frac{GM_T}{R_T} = \frac{1}{2}(V_r^2 + V_T^2) - \frac{GM_T}{d} \\ V_r = 0, \quad V_T^2 = \frac{l^2}{D^2} \end{cases} \quad (23.1)$$

$$\frac{1}{2}(\beta^2 + V_1^2) - \frac{GM_T}{R_T} = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{l^2}{d^2}\right) - \frac{GM_T}{d} \quad (23.2)$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{l^2}{d^2} - \beta^2 - 2GM_T\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R_T}\right)} \approx 11066 \text{ m/s} \quad (23.3)$$

- La velocidad mínima a la cual el apogeo de la órbita corresponde al radio de la órbita de la Luna. Se calcula de la misma manera que V_1 , es decir, por el principio de conservación de la energía, pero cambiando la distancia d a la distancia de la órbita de la Luna D quedando:

$$V_2 = \sqrt{\frac{l^2}{D^2} - \beta^2 - 8\pi^2 M_T \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{R_T}\right)} \approx 11076 \text{ m/s} \quad (24)$$

Cabe decir que por debajo de esta velocidad no se alcanzaría la Luna y el proyectil regresaría

- La velocidad limite a partir de la cual el disparo sería el caso de una órbita parabólica, y la calcularíamos con el principio de conservación de la energía como se indica en el apéndice.

$$V_3 = \sqrt{\frac{8\pi^2 M_T}{R} - \beta^2} \approx 11170 \text{ m/s} \quad (25)$$

3.3 Programación del modelo

Una vez finalizada la sección anterior vamos a volver a calcularlos con el programa Python y vamos a comprobar que los valores numéricos son los mismos, ya que eran como la base inicial con la que posteriormente hemos trabajado. Estos programas han sido tres, de los cuales uno simulaba un disparo a la mínima velocidad posible para llegar a la Luna llamada V_2 , otro eran varias trayectorias a distintas velocidades escogidas y el último son una serie de gráficas de distintas magnitudes en función de la velocidad inicial de disparo. Dichos resultados serán analizados en el siguiente capítulo de momento explicaremos el procedimiento seguido en ellos.

El primer programa traza un disparo del proyectil con la mínima velocidad de lanzamiento además de dibujar también la órbita de la Luna recorrida. El segundo programa calcula varios impactos en la Luna a distintas velocidades de lanzamiento. Por último, el tercer programa realizara una serie de gráficas de distintas magnitudes en función de la velocidad de lanzamiento. **Y decir que los 3 scripts se encuentran en el anexo con su link.**

Hay que explicar que los 3 programas se han fijado las coordenadas del disparo con su posición, velocidad y ángulo inicial, así como la velocidad radial inicial que se han distinguido entre los casos $vr_0 < v_2$ de los casos $vr_0 \geq v_2$. En el primer caso lo que buscas es el ángulo inicial para el cual el apogeo se produce a la distancia mínima en la luna, en el segundo caso lo que buscas es que el objeto pase por el centro de la luna cuando esta esté allí. Para esto primero calculas el tiempo que tarda el objeto en llegar al apogeo o al radio de la órbita de la Luna, se continúa resolviendo la posición de la Luna en ese momento, y finalmente se cambia el ángulo inicial para que coincidan estos dos ángulos.

Programa 1: cálculo de la órbita de disparo que impacta en la luna con una velocidad de lanzamiento V_2 y calcula el ángulo de disparo. El script está en el apéndice y está comentado, pero realizaremos un resumen de cómo funciona. Una vez importadas las librerías descritas anteriormente, definir constantes y métodos se han calculado las magnitudes explicadas de velocidad y distancia.

El *Twobodyorbit* y el *Scipy* con su método **interp1d** interpolando entre los valores de la posición y el ángulo a unos tiempos determinados. Es decir, para $vr_0 > v_2$ se calculan las posiciones, radios r y ángulos hasta el apogeo. Como el apogeo está más allá de la órbita de la luna, el momento en que alcanza $r=D$ está comprendido en esos cálculos y el **interp1d** estima el tiempo y el ángulo al que eso sucede.

Para realizar la interpolación primero se rellena un vector con las posiciones x e y para una serie de tiempos hasta el apogeo (z es siempre 0). Estos vectores tienen un número de puntos (nv y nt en los scripts) siendo nv el número de velocidades y nt el número de tiempos, nt debía ser mayor (1000 o órdenes superiores) para que la interpolación saliese bien. Nv en cambio no podía ampliarse mucho o aumentaba mucho el tiempo de cálculo

Recorreríamos con **for** dicho rango de tiempos para saber sus posiciones y velocidades con un método del *Twobodyorbit* llamado **posvelatt(t)** ya mencionado e iríamos guardando las posiciones.

Ahora calcularíamos la posición angular de la Luna para el tiempo (línea 182) calculado en el **if** y con ella poder saber la posición angular inicial del disparo para coincidir con el trayecto de la Luna

La última parte es inicializar una figura de la librería **plotly.graph_object** e ir añadiendo las órbitas calculadas. Además, se han utilizado comandos para cambiar el aspecto y tamaño de la gráfica para un mejor análisis.

Programa 2: Los *imports*, constantes, métodos y cálculos de magnitudes son idénticos al programa anterior hasta la línea 115.

En este punto es donde empezamos a darle los valores que queremos que utilice al simular los disparos. En este caso en vez de elegir una única velocidad radial inicial de disparo hemos elegido todo el rango desde V_1 a V_2 y de V_2 hasta casi V_3 ya que el programa en ese punto rompe porque se iguala la excentricidad a 1 y sale una órbita parabólica para cuál no está preparado para calcular. Cabe decir que el rango de velocidades utilizado ha sido de 5 velocidades por considerarlo suficiente para el entendimiento de como varía el ángulo y la trayectoria según la velocidad dada, además de gastar menos recursos gráficos.

Para calcular la órbita de cada uno de los disparos para cada velocidad radial inicial y que calcule el ángulo necesario para que coincidía con la Luna, el proceso es igual que en el programa anterior pero recorriendo todas las velocidades del rango dado con ayuda de un **for** y guardando los resultados en un **np.array** (método de la librería *Numpy* vista en el capítulo 2).

Para realizar la figura el procedimiento ha sido igual que en el programa anterior, lo único que ha cambiado es que en este le hemos pasado varias órbitas de los diferentes disparos, pero no hemos dibujado toda la órbita de la luna simplemente la posición donde coincidirían.

Programa 3: el objetivo de este programa era observar el comportamiento de las magnitudes ángulo del disparo, tiempo de disparo y distancia del proyectil a la luna en función de la velocidad radial inicial. El procedimiento ha sido muy similar al del programa 2 también con un bucle recorriendo las velocidades, pero la velocidad radial inicial ha sido otra y los ángulos, tiempos y distancias de disparo se han ido guardando en 3 arrays para posteriormente poder dibujar las gráficas.

Capítulo 4

Análisis y Discusión de resultados

Después de haber tenido en cuenta todas las explicaciones necesarias en los capítulos 5 y 6, es el momento de mostrar los resultados obtenidos en este trabajo. Estructuraremos este capítulo mostrando inicialmente las figuras, seguidamente se dará una interpretación de estas y más tarde comentaremos las gráficas obtenidas y daremos un análisis de las mismas. Cabe destacar que los scripts escritos de estas simulaciones y gráficas se encuentran en el apéndice y están perfectamente comentadas, pero también hay una explicación de la lógica y procedimiento de los scripts en el anterior capítulo

Es muy importante destacar que la velocidad radial inicial de lanzamiento (por ejemplo $V_2 = 11066 \text{ m/s}$) es muy superior a la velocidad transversal provocada por la rotación de la Tierra ($\beta \approx 463 \text{ m/s}$), esto implica que la órbita descrita por los diferentes disparos son órbitas muy alargadas con su perigeo casi en el punto opuesto al del lanzamiento y con el tiempo desde el disparo hasta el apogeo casi igual a la mitad del periodo.

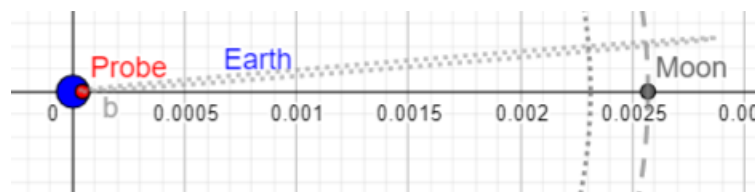


Figura 9: ejemplo de órbita de un disparo con velocidades similares a las utilizadas por nuestros cálculos

4.1.- Resultados experimentales

Se ha utilizado el programa de Python dado en el apéndice que procesa los datos y fórmulas dados donde utilizamos las variables del ángulo, el tiempo de disparo y la distancia a la Luna en función de la velocidad inicial del disparo hecho desde el ecuador de la Tierra. También se han calculado una serie de magnitudes para compararlas con resultados teóricos y comprobar que todo funciona como debe.

Para empezar, hemos ido recogiendo datos de distintas magnitudes dadas por el programa para ver si iban cuadrando con los cálculos hechos a mano en el apartado 3.2 del capítulo 3. Como, por ejemplo:

```
Velocidad inicial disparo vx0=11076.911792320268 m
```

```
Velocidad inicial disparo vy0=463.82852092270974 m
```

```
distancia al punto(vro=0) = 3.4602e+08 m
```

Figura 10: cálculos realizados con el programa 1 donde vx0 corresponde a V_2 , vy0 a β y la distancia al punto con d

Si recordamos los valores calculados en 3.2 y con los dados en la bibliografía vemos que son muy semejantes pese a que puede haber fallos de redondeo sobre todo en los hechos a mano

Una vez calculados estos valores se han calculado las velocidades que nos servirán para el estudio V_1, V_2 y V_3 explicadas en el capítulo 3.2. Los resultados han sido los siguientes:

```
Velocidad radial inicial V1 = 11066.52340482336 m/s
```

```
Velocidad radial inicial V2 = 11076.911792320268 m/s
```

```
Velocidad radial de escape (órbita parabólica) V3 = 11170.12720961537 m/s
```

Figura 11: velocidades calculadas por el programa

Por tanto, comparando los resultados analíticos con los valores del programa.

	Analíticos/(m/s)	Programa/(m/s)
V_1	11066,5234	11066.5234
V_2	11076,9117	11076.9117
V_2	11170,1272	11170.1272

Tabla 2: resultados para las distintas velocidades dadas analíticamente y por Python

Como podemos chequear en la *Tabla 2* los valores son acertados comparándolos con los valores teóricos calculados en el capítulo 3. Cabe decir que a partir del cuarto decimal si que había alguna diferencia, pero se ha considerado como buenos resultados.

Con estos valores ya comprobados y calibrados además de generar las simulaciones mostradas en el apartado anterior, se han realizado una serie de gráficas en el último script para ver mejor el comportamiento de las distintas magnitudes que afectan a la trayectoria de la nave.

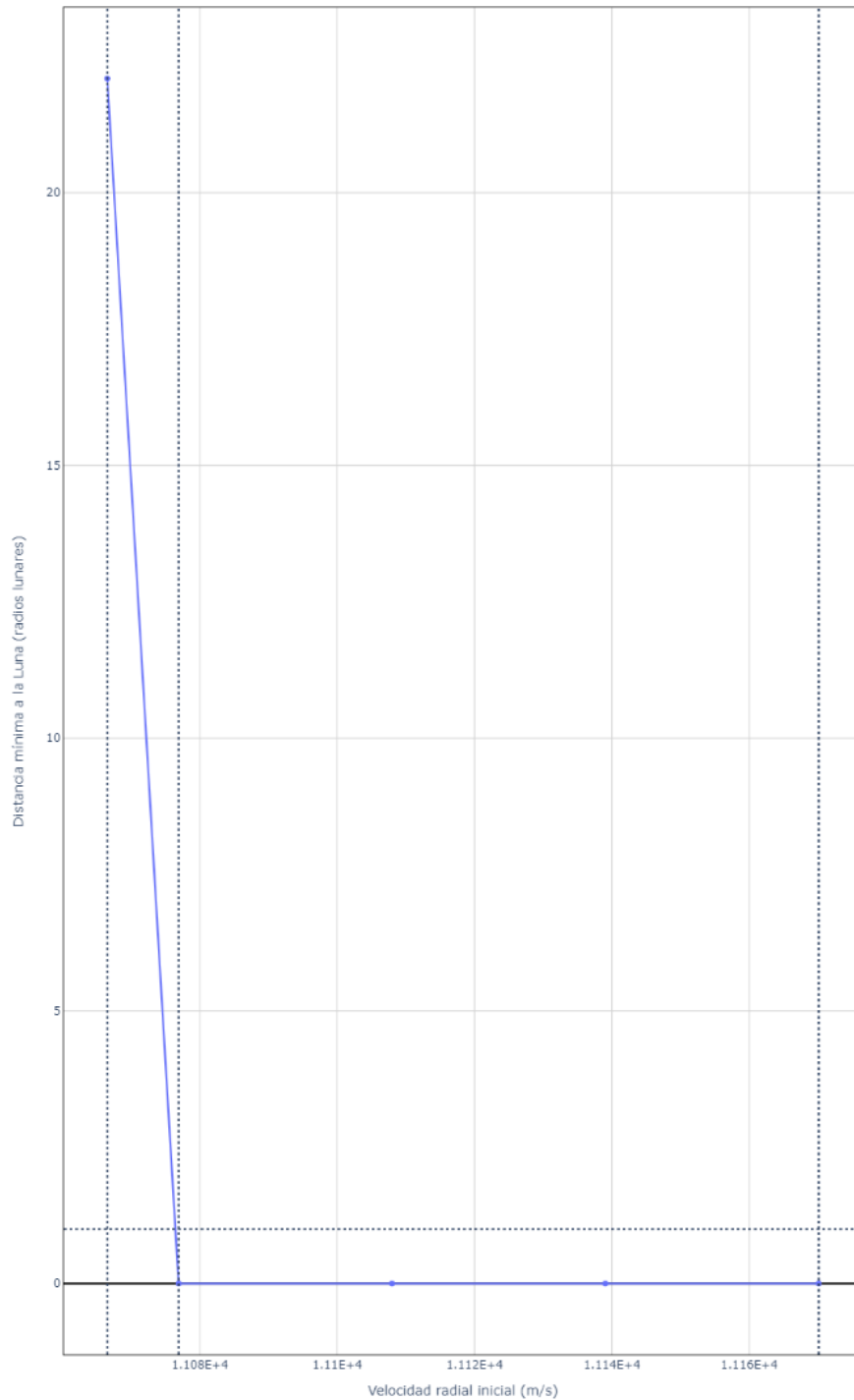


Figura 12: distancia a la que llega la nave en función de la velocidad radial del disparo inicial

Como cabe esperar la distancia a la que se acerca el proyectil a la Luna va disminuyendo conforme la velocidad inicial de lanzamiento aumenta hasta llegar a la Luna que corresponde a la velocidad V_2 y se puede ver en la figura en el momento que llega al 0 que por mucho que aumentes la velocidad no cambia el valor ya que estaría impactando con la Luna. Otras magnitudes si se ven afectadas para valores más altos que V_2 como veremos a continuación.

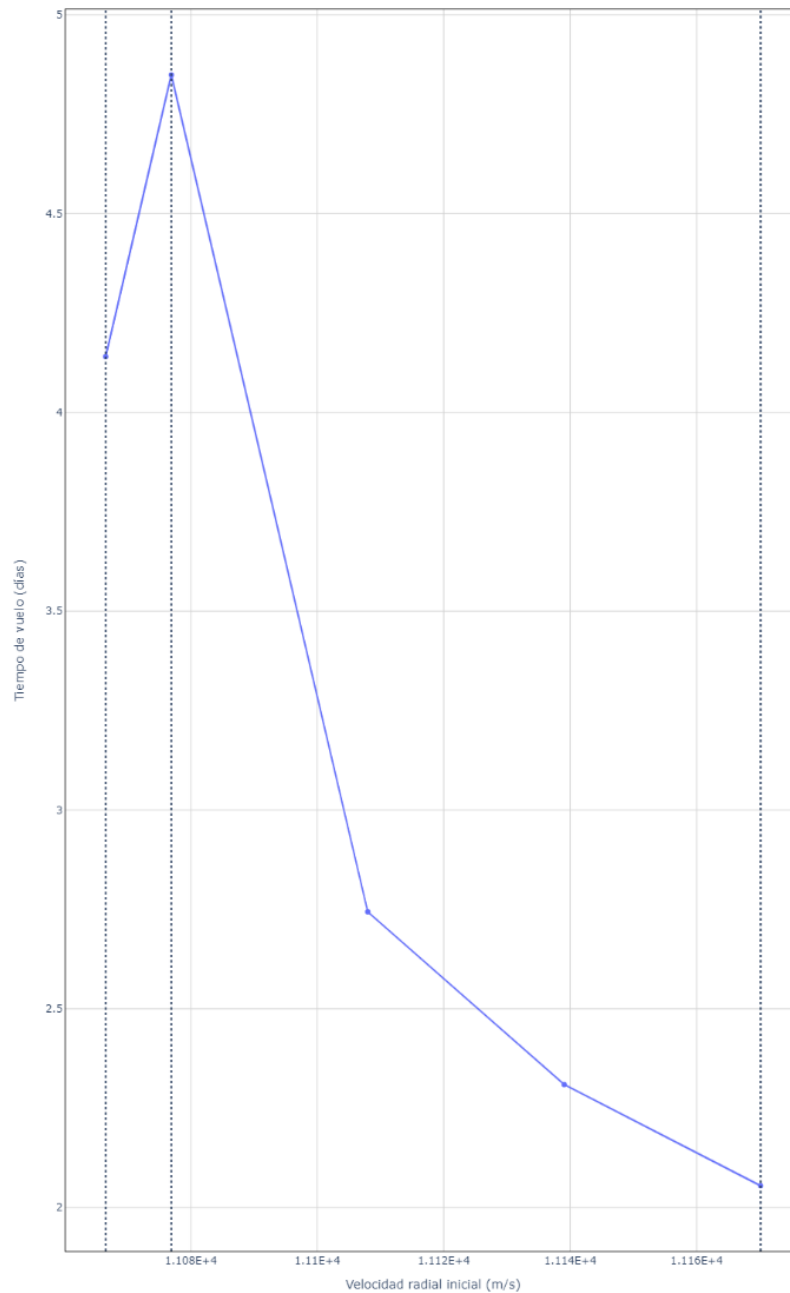


Figura 13: tiempo tardado por el proyectil en llegar a su punto más lejano en función de la velocidad radial de disparo

Como podemos observar tenemos un pico correspondiente a la velocidad V_2 , que sería la menor velocidad posible para el alunizaje. El primer tramo hasta el pico es ascendente porque aunque la velocidad inicial vaya aumentando también aumenta la distancia que puede llegar a recorrer el proyectil, es decir, cada vez se va acercando más a la luna como se pudo ver en la *Figura 12* hasta llegar a la luna, una vez llegado a la luna (llegamos a V_2) la distancia empieza a ser constante como se ve también en la *Figura 12* y comienza el tramo después del pico de la *Figura 13* que conforme aumentamos la velocidad inicial de lanzamiento el tiempo que tarda en llegar disminuye.

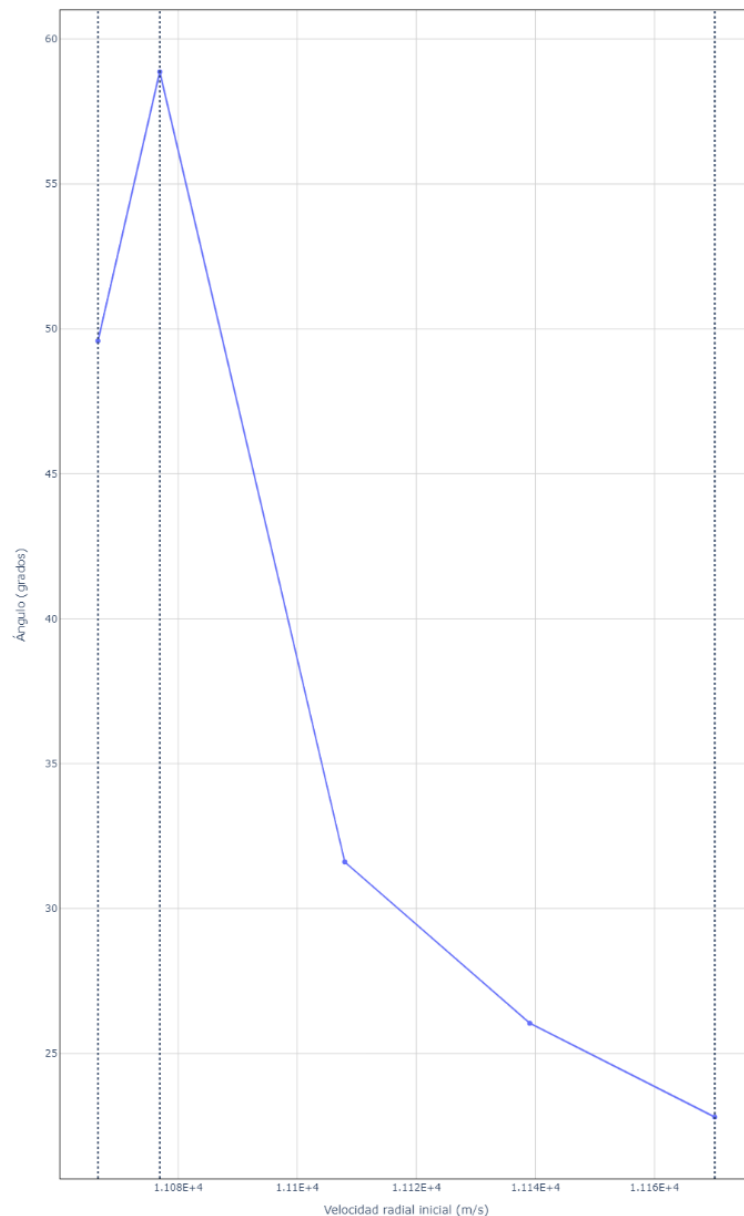


Figura 14: ángulo de lanzamiento necesario para que la nave llegue se acerque lo más posible a la luna en función de la velocidad radial inicial del disparo

Se puede ver en la *Figura 14* un pico que corresponde con la velocidad V_2 y coincide con la llegada de la nave a la luna. El tramo ascendente a este pico tiene esta forma porque la nave aún no ha llegado a la Luna, pero el ángulo si va aumentando para que el punto de distancia máxima correspondiente a la velocidad radial inicial coincida con la posición de la Luna en ese instante. Por tanto, el pico corresponde con el ángulo al que la velocidad radial inicial sería la mínima para alunizar. La parte descendente que continua al pico tiene sentido ya que como ya hemos explicado anteriormente en la *Figura 12* la distancia se hace constante y por tanto al aumentar la velocidad la nave llega antes a la luna como se ve en la *Figura 13* y si disminuye el tiempo la Luna recorrerá menos camino de su órbita y el ángulo necesario de lanzamiento disminuirá

4.2.- Cálculos de los disparos

La idea principal de este trabajo es cumplir y comprender como sería el libro de Julio Verne, para realizar un disparo de una nave a la luna, utilizando las leyes de Kepler, la ley de gravitación de Newton además de la conservación de la energía y el movimiento.

Hemos diseñado varios programas para realizar un cálculo de los disparos siguiendo las leyes expuestas en el capítulo 2.

Una vez realizados los cálculos guías se procede a realizar el disparo para la velocidad mínima radial que deberá tener la nave y con el resultado para V_2 tenemos:

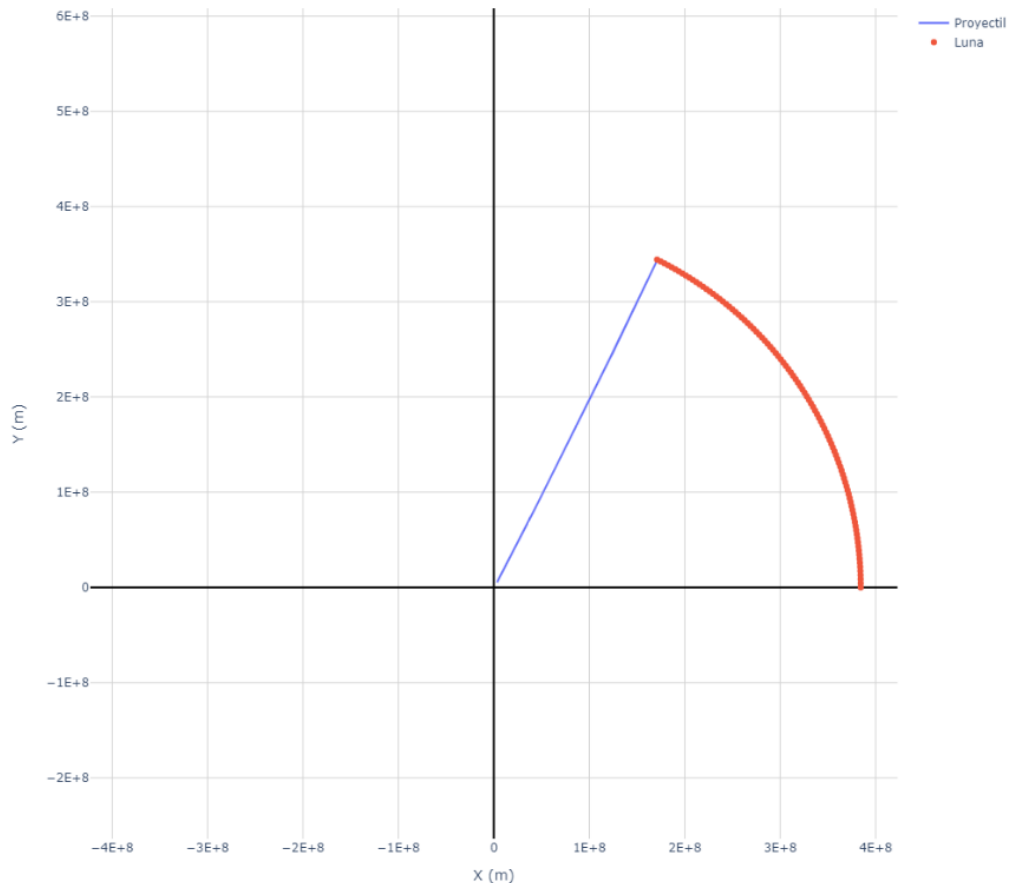


Figura 15: intersección entre el disparo de la nave con una velocidad V_2 y la Luna siendo la trayectoria de la órbita del disparo en azul y la de la Luna en rojo

Como se explicó en el capítulo anterior la excentricidad de la órbita de la luna era nula y por ello es una órbita cerrada circular como se puede comprobar su curvatura en la Figura 1. Además de pedir que nos pinte distintas magnitudes como mostramos en el principio de este apartado Gráficamente se puede comparar que las posiciones son correctas y

coinciden con las indicadas en el programa previamente, de la siguiente forma.

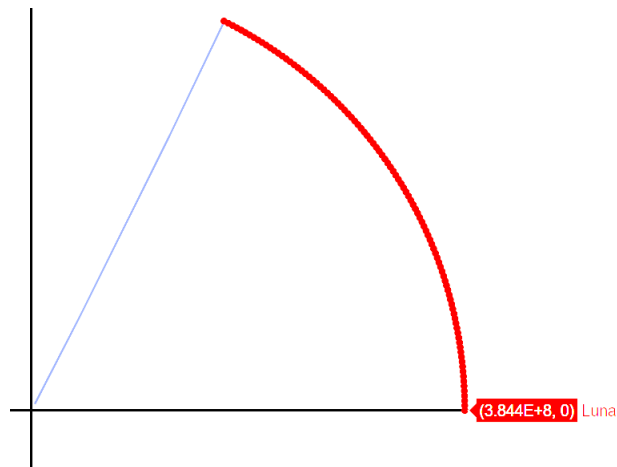


Figura 16: comprobación gráfica posición inicial de la Luna en m

Cabe destacar que, aunque la trayectoria del proyectil parezca una línea recta tiene cierta curvatura por los datos que dimos al principio de este capítulo

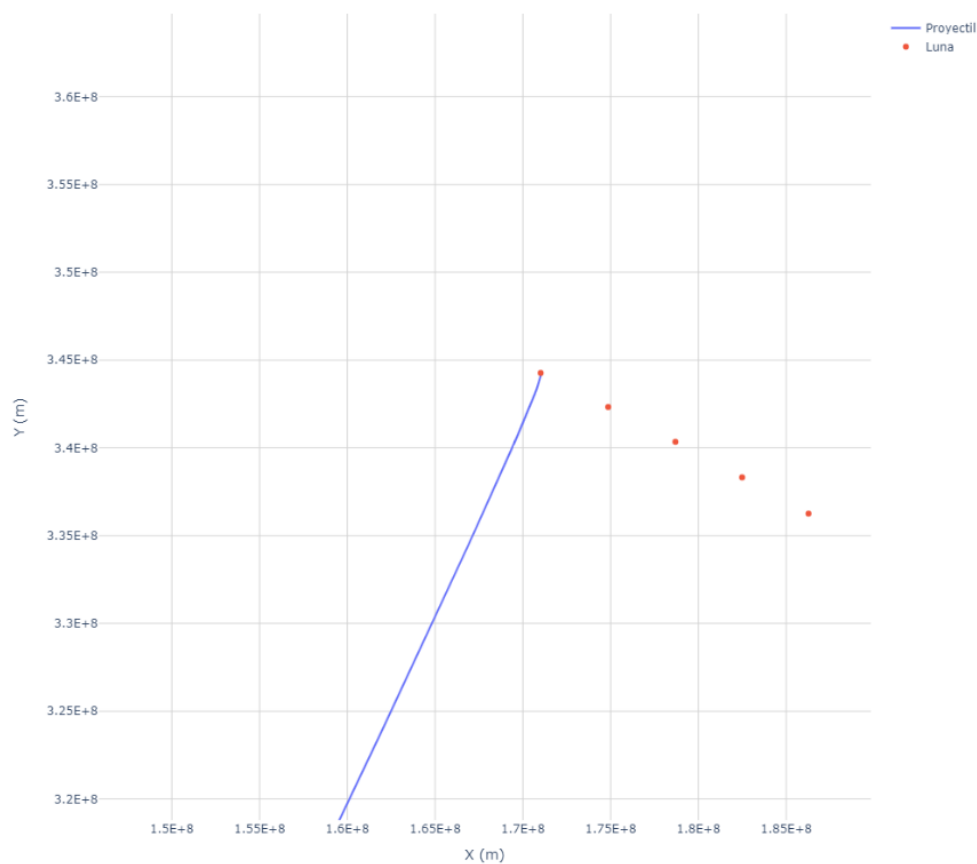


Figura 17: llegada del proyectil a la Luna, apreciándose mejor la curvatura de la órbita del disparo

Con el programa 2 pudimos simular diferentes disparos a distintas velocidades, así como con sus ángulos iniciales necesarios para coincidir con la Luna.

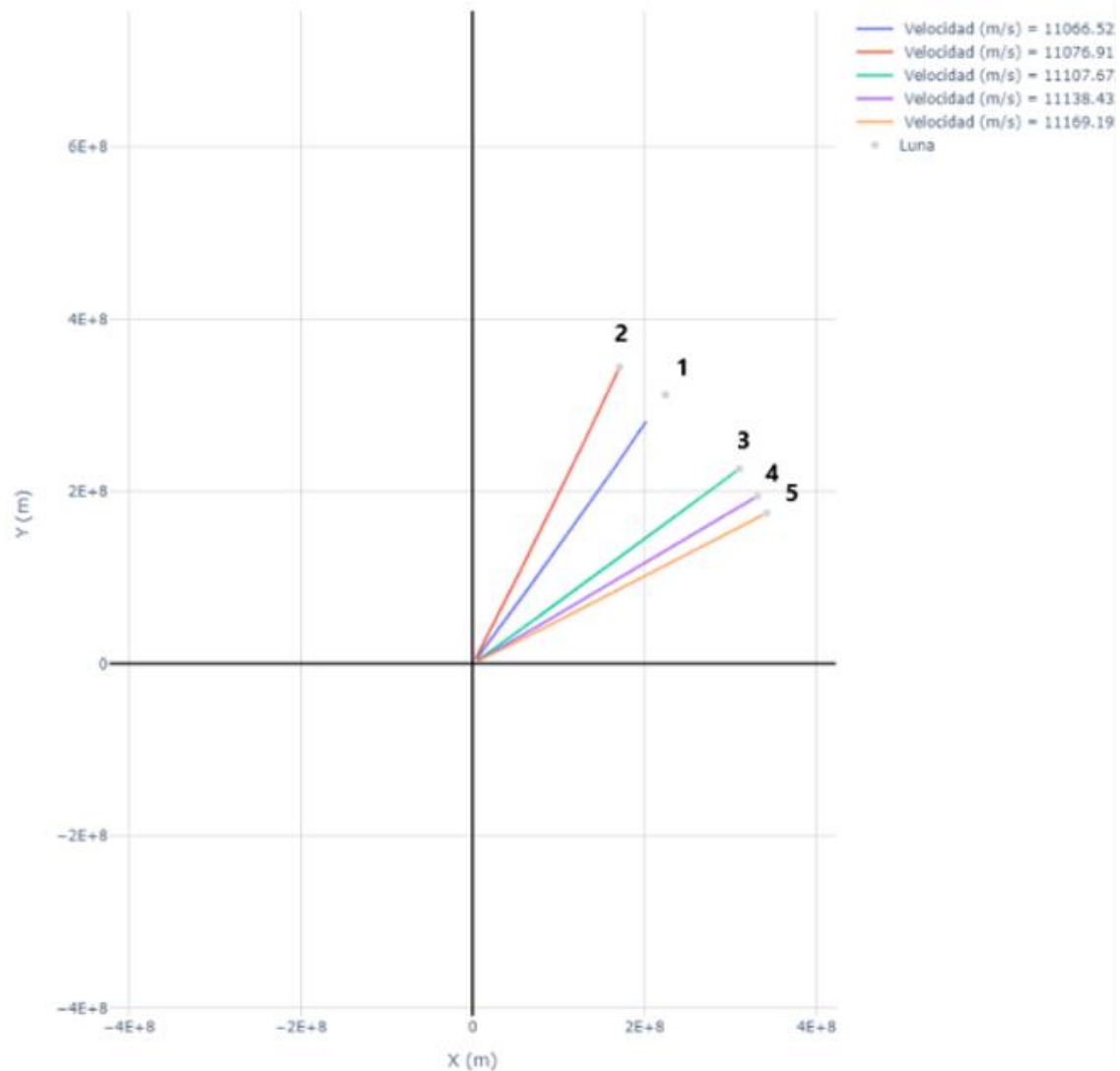


Figura 18: trayectorias del proyectil para distintas velocidades iniciales marcadas en la leyenda

Procederemos a explicar cuál es el comportamiento a seguir de las trayectorias y ángulos de las distintas velocidades en la Figura 3:

- *Trayectoria 1* ($v_1 = 11066.52 \text{ m/s}$): como se ve en la figura la nave nunca llega a tocar la Luna. Esto es debido a que la velocidad inicial es la correspondiente a la V_1 calculada para llegar al punto de inflexión entre las fuerzas de la Tierra y de la Luna, por tanto, la nave llegaría hasta ese punto y volvería a caer hacia la Tierra

- *Trayectoria 2* ($v_2 = 11076.91\text{m/s}$): corresponde a la órbita de la nave en color rojo y la velocidad radial inicial es la misma que V_2 calculada en apartado 3.2 que corresponde a la velocidad mínima necesaria para alcanzar la Luna.

- *Trayectorias 3, 4 y 5* ($v_3 = 11107.67\text{m/s}$, $v_1 = 11138.43\text{m/s}$ y $v_1 = 11169.19\text{m/s}$): órbitas de disparo verde, morado y naranja correspondiente. Como se puede ver en la figura, en estas trayectorias el ángulo cada vez es más pequeño cuando la velocidad aumenta, esta tendencia se pudo ver mejor en las gráficas de los resultados del apartado 4.1

Capítulo 5

Consideraciones finales y trabajo futuro

En este último capítulo se dictarán las principales conclusiones de este trabajo a partir de los resultados del anterior capítulo. También se hablará de posibles proyectos para este trabajo e investigaciones futuras.

5.1.- Conclusiones

En general ha sido un trabajo el cual me ha servido para recordar y repasar mis conocimientos de astronomía sobre las órbitas keplerianas y el modelado newtoniano, además de ampliar mis conocimientos como el cálculo de ciertos parámetros orbitales a partir de la posición y las velocidades iniciales, así como de implementarlo y ayudarme de la programación.

Siendo el objetivo principal de este trabajo replicar el viaje planteado por Julio Verne como la solución a un problema de los cuerpos Tierra, proyectil Luna. Se han mostrado la comprobación de que los resultados de las velocidades V_1 , V_2 y V_3 son las mismas que las calculadas en el apartado 3.2, además que los comportamientos que se han podido ver en las gráficas calculadas con Python son coherentes y actúan según lo explicado como pueden ser las órbitas de los disparos que son muy alargadas y su perigeo es el punto opuesto al de lanzamiento, como se pudo ver en el comienzo del capítulo 4.

Recalcar que se han hecho una simplificación del problema y unas aproximaciones para tener un nivel asequible al tiempo disponible, además de adaptar dichas aproximaciones y hacer un modelo adecuado a la teoría

Me ha aportado mucho el aprender a implementar cálculos en un lenguaje de programación moderna tan importante como Python y el hecho de aprender como manejar librerías básicas (*Plotly*, *Numpy*, etc) a librerías mas avanzadas y específicas para poder realizar cálculos numéricos y gráficas mas avanzadas como es el ejemplo de *Twobodyorbit*.

Decir que hemos utilizado las plataformas de eclipse, jupyter notebook y Google Colab para el código.

Se ha conseguido realizar gráficas de elementos como la distancia del disparo, el tiempo de vuelo y el ángulo de lanzamiento frente a la velocidad radial inicial del lanzamiento con un análisis de su comportamiento en el apartado 4.1.

También hemos podido plasmar las distintas trayectorias según su velocidad de lanzamiento comprobando que la forma coincide con las explicaciones cualitativas que hemos llegado y se plasmó en 4.2

Como anécdota o acote decir que me resulta bastante sorprendente que hayamos podido contactar con un investigador japonés y no deja de representar el apoyo que siempre ha habido en física.

5.2.- Trabajo futuro

Como se puede suponer este trabajo contiene muchas aproximaciones para poder llegar a unos resultados, pero no deja de ser un comienzo al que se le pueden ir introduciendo más factores a tener en cuenta y poder ir acercándose más a la realidad. Por ello en este apartado se van a plantear distintas opciones que serían lógicas introducirlas en continuación a lo realizado hasta ahora.

1. En una primera ampliación del trabajo podríamos suponer la luna un cuerpo extenso ya que se ha supuesto como un punto. Esto lo que haría sería ampliar el rango del ángulo de lanzamiento ya que podría impactar en toda la extensión de la luna. Además, ver que disparos podrían no impactar directamente en la cara frontal de la Luna y llegar a la cara oculta de la Luna. Esto supondría que la velocidad no podría sobrepasar V_3 o se saldrían de la órbita lunar y terrestre
2. Otro gran objetivo sería implicar la atracción de la Luna. Esto implicaría tener un problema de tres cuerpos, manteniendo la Tierra inmóvil y con la Luna en una órbita circular a su alrededor. En este caso tendríamos que resolver numéricamente dos ecuaciones de segundo grado, cosa que ya intentamos con el programa GeoGebra.
3. Por último, podríamos llevarlo al problema real, pero es algo mucho más tedioso y extenso, que se necesitarían contar con muchos más refinamientos:
 - Plasmar una órbita real de la Luna, es decir, mucho más complicada que una elipse o una órbita circular debido a las perturbaciones solares hay por supuesto tres dimensiones y una inclinación sobre el plano ecuatorial de la Tierra
 - También podría haberse planteado el mismo problema como un sistema binario con un centro de masas

Anexo

He decidido colocar aquí los enlaces a los scripts guardados en la plataforma de Google Colab:

- **Programa 1: Disparo para V_2**

https://colab.research.google.com/drive/1P8qD_F2UqGcTnQQGPF3qmp_sHLxZnUZ1?usp=sharing

- **Programa 2: varios disparos a distintas velocidades iniciales entre $V_1 \leq V_2 < V_3$**

<https://colab.research.google.com/drive/1Y1HNIKMimKaq-PuksFLNwm1OQgK6jH8R?usp=sharing>

- **Programa 3: *Gráficas***

https://colab.research.google.com/drive/1OdQqXKMFERHZ4me9aCGG24lD_0mmlly7?usp=sharing

Bibliografía

[1] Vicent J.Martínez, Joan Antoni Miralles, Enric Marco y David Galadi-Enríquez, “*Astronomía fundamental*”, segunda edición. Universidad de Valencia 2007

[2] Landau & Lifshitz: “*Mecánica*”, Ed. Reverté, Barcelona, 1991

[3] Johannes Kepler, “*New Astronomy*”, traducción al inglés de “*Astronomia nova*”, Cambridge: Cambridge Univ. Pr., 1992

[4] “Python” <https://www.python.org/>. Última fecha de consulta 20/06/2021

[5] “pytwobodyorbit 1.0.0” <https://pypi.org/project/pytwobodyorbit/>. Última fecha de consulta 20/06/2020

[6] “Plotly Python Open Source Graphing Library” <https://plotly.com/python/>. Última fecha de consulta 20/06/2021

[7] “`scipy.interpolate.interp1d`” <https://pypi.org/project/pytwobodyorbit/>. Última fecha de consulta 20/06/2021

[8] “2020 Numpy survey” <https://numpy.org/>. Última fecha de consulta 15/06/2021

[9] “Alejamiento de la Luna” <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/celeste/alejamiento/alejamiento.html>. Última fecha de consulta 15/06/2021

[10] “Bienvenidos a Wikipedia” <https://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia> Última fecha de consulta 15/06/2021

[11] “Shushi Uetsuki” <https://github.com/whiskie14142> Última fecha de consulta 15/06/2021

[12] Ruiza, M., Fernández, T. y Tamaro, E. (2004).” *Resumen de De la Tierra a la Luna de Juilo Verne. En biografías y Vidas.* “Barcelona(España) https://www.biografiasyvidas.com/obra/tierra_luna.html Última fecha de consulta 15/06/2021

[13] “Dinámica” <http://www2.montes.upm.es/dptos/digfa/cfisica/dinamsist/tierraluna.html> Última fecha de consulta 15/06/2021